Fisika Matematika III
Kuliah 5: Fungsi Bessel

Hasanuddin

16-09-2021

Pers. Differensial Bessel

$$x^2\, y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad \ldots (1)$$

dengan p adalah suatu konstanta (tidak harus bilangan bulat).

Bentuk lain dari pers. Bessel:

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad \ldots (2)$$

Asumsi solusi:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

Turunan y

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1} \quad ; \; xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s}$$

$$(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2 a_n x^{n+s-1} \quad ; \; x(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2 a_n x^{n+s}$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} \; ; -p^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} p^2 \, a_n x^{n+s}$$

Substitusi suku-suku di atas ke dalam pers. (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)^2 - p^2] a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+2} = 0$$

Solusi Bessel

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+s)^2-p^2]a_n x^{n+s}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+s}=0$$

$$(s^2-p^2)a_0\,x^s+[(s+1)^2-p^2]a_1x^{s+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+s)^2-p^2]a_n+a_{n-2}\}x^{n+s}=0$$

Untuk $n=0$ (koefisien pangkat s)

$$s=\pm p$$

Untuk $n=1$ (koefisien pangkat $s+1$)

$$a_1=0$$

$$a_n=-\frac{1}{(n+s)^2-p^2}\,a_{n-2}$$

Solusi Bessel

Secara spesifik, jika $s = p$, maka koefisien ke-n:

$$a_n = -\frac{1}{(n+p)^2 - p^2} a_{n-2} = -\frac{1}{n^2 + 2np} a_{n-2}$$

$$= -\frac{1}{n(n+2p)} a_{n-2} \quad \text{, untuk } n \text{ genap dan } n \geq 2$$

$a_n = 0$, untuk n ganjil.

Atau, dalam $m = n/2$,

$$a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(m+p)} a_{2m-2} \quad \text{, untuk } m = 1,2,3, \ldots$$

Solusi Bessel

$m = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2\ 1(1+p)}$$

$m = 2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(2+p)} = \frac{a_0}{2^4\ 1.2(1+p)(2+p)}$$

$m = 3$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 3(3+p)} = -\frac{a_0}{2^6\ 2.3(1+p)(2+p)(3+p)}$$

…

Rumus bagi koefisien ke-m:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m\ p!}{2^{2m}\ m!\,(m+p)!}a_0$$

Solusi Bessel

- p faktorial yang didefinsikan oleh $p! = 1.2 \ldots .(p-1)p$ hanya dapat dihitung untuk p bilangan bulat.
- Karena p dapat berupa sembarang bilangan maka, definisi p faktorial diganti dengan

$$p! = \Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p \, e^{-t} \, dt$$

- Rumus koefisien ke-m:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m \, \Gamma(1+p)}{2^{2m} \, m! \, \Gamma(m+1+p)} a_0$$

Solusi Bessel Jenis Pertama

$$y = x^p(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \ \ldots)$$

$$= a_0 2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \Gamma(1+p)\left[1 - \frac{1}{2^2\Gamma(2+p)}x^2 + \frac{1}{2^4 2!\,\Gamma(3+p)}x^4 - \frac{1}{2^6 3!\ \Gamma(4+p)}x^6 + \cdots\right]$$

Jika $a_0 = \ 1/[2^p\Gamma(1+p)]$, solusi Bessel

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Fungsi Bessel ke-p

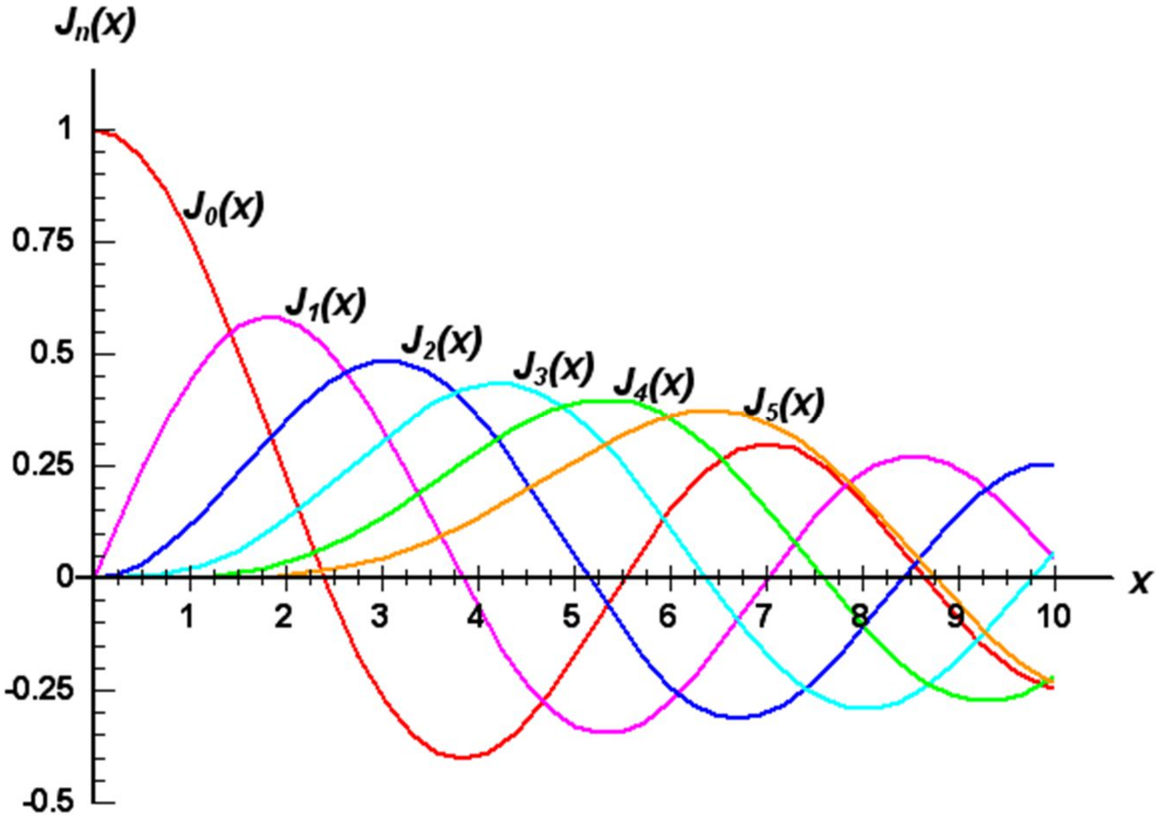
$$J_p(x) = \frac{1}{0!\,p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{1}{1!\,(1+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2} + \frac{1}{2!\,(2+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4} - \frac{1}{3!\,(3+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+6} + \cdots$$

$$J_0 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots$$

$$J_1 = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \cdots$$

$$J_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{1!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{2!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \frac{1}{3!\,5!}\left(\frac{x}{2}\right)^8 + \cdots$$

Grafik Fungsi Bessel



$$s = -p$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

Untuk p bukan integer, maka J_{-p} akan dimulai dengan suku x^{-p} dan J_p dimulai dengan suku x^p. Akibatnya, J_p dan J_p adalah solusi saling bebas dan solusi umum untuk pers. (1):

$$A\,J_p + B\,J_{-p}$$

dengan A dan B adalah koefisien. Catatan: p integer.

Apa yang terjadi pada J_{-p} jika p integer?

- J_p akan bermula dengan x^p .
- Tetapi, J_{-p} bermula dengan x^p seperti J_p. Mengapa?
- Ada nilai $m + 1 - p$ yang sama dengan 0 dan bilangan bulat negatif. Sehingga, $\Gamma(m + 1 - p)$ yang berada di penyebut suku ke m bernilai tak hingga.
- Misal $p = 1$ dan $m = 0$, maka $\Gamma(0) = (-1)! \to \infty$. Koefisien pangkat 0 = 0.
- Misal $p = 2, m = 0$ dan $m = 1$ menghasilkan $\Gamma(-1)$ dan $\Gamma(0)$.

Untuk J_{-p}

Koefisien suku m yang nol memenuhi kondisi

$$m + 1 - p \leq 0$$
$$m \leq p - 1$$

Jadi, koefisien suku m yang tidak nol dimulai dengan

$$m = p$$

Koefisien pangkat dimulai dengan

$$x^{2m-p} = x^{2p-p} = x^p.$$

Kesimpulannya, J_p dan J_{-p} tidak saling bebas.

$$J_{-p} = (-1)^p \, J_p$$

Tunjukkan bahwa $J_{-p} = (-1)^p J_p$! Untuk p integer

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

$$= \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

Ubah indeks $m \to m'$ sehingga $m = p \ \Rightarrow m' = 0$:

$m' = m - p$ atau $m = m' + p$

$$J_{-p} = \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'+p}}{(m'+p)!\ \Gamma(m'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m'+p)-p}$$

$$J_{-p} = (-1)^p \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'}}{\Gamma(m'+p+1)!\, m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+p} = (-1)^p J_p$$

Fungsi Bessel Jenis Kedua/Fungsi Neumann/ Fungsi Weber

$$N_p = Y_p = \frac{\cos \pi p \ J_p \ - J_{-p}}{\sin \pi p}$$

Solusi umum pers. (1) yang valid bagi integer atau bukan integer:

$$y = A\, J_p + B\, Y_p$$

dengan A dan B adalah konstanta.

Soal Latihan

- Tunjukkan bahwa

(1) $\sqrt{\pi x/2}\, J_{-1/2}(x) = \cos x$

(2) $J_{3/2}(x) = x^{-1} J_{1/2} \; - J_{1/2}$

(3) $Y_{1/2}(x) = -J_{-1/2}$

(4) $Y_{3/2}\,(x) = J_{-3/2}$

(5) $Y_{(2n+1)/2} = (-1)^{n+1} J_{-(2n+1)/2}$

Rumus Reokurensi

Turunan J_p

$$\frac{dJ_p}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,(2m+p)}{m!\ \Gamma(m+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,(m+p)}{m!\ \Gamma(m+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,m}{m!\ \Gamma(m+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1+p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}\right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1+1}}{(m-1)!\ \Gamma(m-1+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)+p+1}\right]$$

$$\frac{dJ_p}{dx} = \frac{1}{2}\left(J_{p-1} - J_{p+1}\right)$$

Reoccurence Relation

$$\frac{x}{2p} J_{p-1} = \frac{x}{2p}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1+p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+p)}{m!\ \Gamma(m+1+p)p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{m!\ \Gamma(m+1+p)p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m p}{m!\ \Gamma(m+1+p)p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1+1}}{(m-1)!\ \Gamma(m-1+1+p+1)p} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)+p+1+1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(m+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Reoccurence Relation

$$= -\frac{x}{2p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\ \Gamma(m-1+1+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)+p+1} + J_p$$

$$= -\frac{x}{2p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m!\ \Gamma(m+1+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p+1} + J_p$$

$$\frac{x}{2p}J_{p-1} = -\frac{x}{2p}J_{p+1} + J_p$$

$$\frac{2p}{x}J_p = J_{p-1} + J_{p+1}$$

Latihan

- Buktikan Bahwa

(1) $\frac{d}{dx}\left[x^{p} J_{p}\right] = x^{p}\, J_{p-1}$

(2) $\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_{p}\right] = -x^{-p}\, J_{p+1}$

Persamaan Differensial dengan Solusi yang berkaitan dengan Fungsi Bessel

- Dalam beberapa kasus, pers. Diff. bukan dalam bentuk pers. (1). Tetapi, solusinya dapat dinyatakan melalui suku-suku fungsi Bessel.
- Pers. Berikut:

$$y'' + (1-2a)\frac{y'}{x} + \left[(bc\,x^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right]y = 0$$

Memiliki solusi

$$y_p(x) = x^a\, Z_p(bx^c)$$

Dengan

Z_p dapat diganti dengan J_p maupun Y_p atau N_p.

Contoh:

Tentukan solusi persamaan berikut dalam bentuk fungsi Bessel:

$$y'' + 9xy = 0$$

Solusi:

Bandingkan dengan

$$y'' + (1-2a)\frac{y'}{x} + \left[(bc\,x^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right]y = 0$$

Didapat

$$1 - 2a = 0 \quad \to a = \frac{1}{2}, \qquad (bc)^2 = 9 \quad \to b = \frac{3}{c} = 2$$

$$2(c-1) = 1 \qquad \to c = \frac{3}{2}, \qquad a^2 - p^2c^2 = 0 \ \to p = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}}\, Z_{1/3}\left(2x^{3/2}\right)$$

Solusi umum

$$y = x^{1/2}\left[A\,J_{1/3}\left(2x^{3/2}\right) + B\,N_{1/3}\left(2x^{3/2}\right)\right]$$

Fungsi Lain yang berkaitan dengan fungsi Bessel

- Fungsi Hankel atau Fungsi Bessel Jenis ke-3

$$H_p{}^{(1)}(x) = J_p(x) + i\,N_p(x)$$
$$H_p{}^{(2)}(x) = J_p(x) - i\,N_p(x)$$

- Fungsi Bessel Hiperbolik

$$I_p(x) = i^{-p}\,J_p(ix)$$
$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}\,i^{p+1}\,H_p{}^{(1)}(ix)$$

Yang merupakan solusi dari

$$x^2y'' + xy' + (p^2 - x^2)y = 0$$

Fungsi Bessel Sferis

Jika $p = n + \frac{1}{2}$, dengan n integer, maka

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$h_n{}^{(1)}(x) = j_n(x) + i\, y_n(x)$$

$$h_n{}^{(2)}(x) = j_n(x) - i\, y_n(x)$$

Fungsi Kelvin

- Distribusi arus listrik dalam kawat memenuhi persamaan differensial berikut:

$$y'' + \frac{y'}{x} - iy = 0$$

- Solusi persamaan di atas adalah fungsi Kelvin

$$y = Z_0\left(i^{3/2}x\right)$$

- y adalah fungsi kompleks dan dapat berupa

$$J_0\left(i^{3/2}x\right) = ber(x) + i\ bei(x)$$

$$K_0\left(i^{3/2}x\right) = ker(x) - i\ kei(x)$$

Dengan $ber(x)$ dan $bei(x)$ masing-masing adalah real Bessel dan Imajiner Bessel.

Fungsi Airy

- Fungsi Airy merupakan solusi dari persamaan differensial Airy:

$$y'' - xy = 0$$

- Pers. Airy berkaitan dengan pers. Diff. Bessel termodifikasi dengan

$$a = \frac{1}{2}\,, c = \frac{3}{2}, p = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}i$$

dan memiliki solusi

$$y = \sqrt{x}\, Z_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}i\, x^{3/2}\right)$$

- Fungsi Airy didefinisikan sebagai

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}}\; K_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

$$Bi\,(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}\,\left[I_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$